部分論理関数とドントケア

- 部分論理関数：定義域が部分的な関数
  - 入力値に意味が無い場合がある
  - ドントケア入力

例

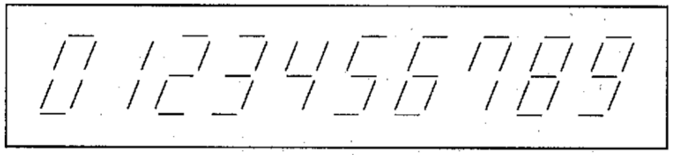
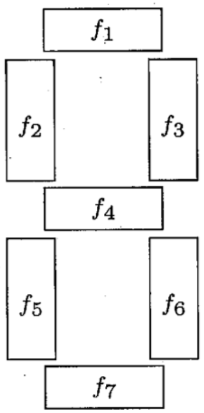


図 3.10　数字の 7 線分素子表示



$x_3x_2x_1x_0$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	線分素子表示
0 0 0 0	1	1	1	0	1	1	1	0:
0 0 0 1	0	0	1	0	0	1	0	1:
0 0 1 0	1	0	1	1	1	0	1	2:
0 0 1 1	1	0	1	1	0	1	1	3:
0 1 0 0	0	1	1	1	0	1	0	4:
0 1 0 1	1	1	0	1	0	1	1	5:
0 1 1 0	1	1	0	1	1	1	1	6:
0 1 1 1	1	1	1	0	0	1	0	7:
1 0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	8:
1 0 0 1	1	1	1	1	0	1	1	9:

x1x0

x3x2	00	01	11	10
00	1			1
01				1
11	*	*	*	*
10	1		*	*

ドントケア入力での出力は＊と書く
最簡形が簡単になるように＊を0,1
好きなように読む
(1110, 1010)を1, その他を 0 と読むと良い

1010-1111の範囲の入力には意味が無い

論理関数の簡単化

$$T(f) = \cup_{p_j \in Q} T(p_j) \qquad Q \subseteq P_j$$

(a) $|Q|$ が最小

(b) 式全体で使われるリテラルの個数が最小
(|Q|が同じ組み合わせが複数あったら)

- カルノー法
  - ３～６変数に適用可能
  - 分かりやすいけど、見落としなどミスもある
- クワイン・マクラスキ法
  - 変数が多くても大丈夫
  - プログラムしやすい
- コンセンサス法など他にも多数の方法がある

クワイン・マクラスキ法のための準備

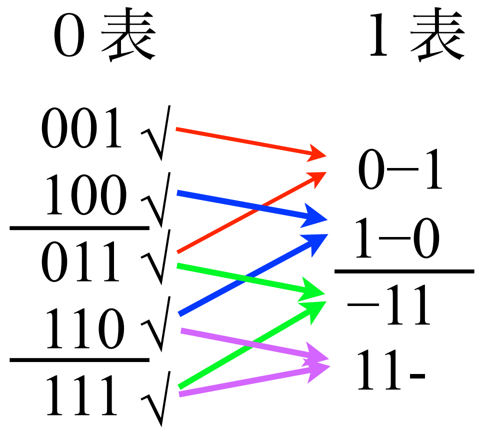
- **部分積項の系列表現**
  - 部分積項を「0, 1, -」で書く書き方
  - 肯定リテラルを１、否定リテラルを０、無い変数を−で書く
    - 例：５変数 $x_1\overline{x}_2x_4 \rightarrow$ 10−1−
- **併合**：１文字違う系列表現ペアを併せて違うところを−に置き換え
  - $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4\overline{x}_5 \rightarrow$ 00100
  - $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4x_5 \rightarrow$ 00101
  - 併合後： 0010− $\rightarrow \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$
- 「0010−」と「0110−」を併合すると「0−10−」となる
- 併合の結果は部分積項よりリテラルが減っている

クワイン・マクラスキ法とは「併合可能なペア」を系統的に探して、順に併合し、リテラルを減らして簡単にしていく方法である

QM法前半

1. 真理値表（or 真入力ベクトル）から対応する積項系列表現を作る
2. 積項系列表現の１の個数毎に並べ替える（k表）
3. 併合可能なペアを捜す
   - 併合可能なものは１文字違いなので、１の個数が１違う所を見る
4. 併合したペアの積項系列表現を記し、併合したペアをチェック√
5. 併合可能なペアがなくなるか全てチェックされるまで繰り返す
   - k++して、ステップ２に戻るか、終了する

x1	x2	x3	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



さらに併合可能なペア無し

この段階でチェックされずに残っている積項が主項に対応する

全てチェックしたのでk+1表に移行

QM法後半：主項表

6. 最終的に残った積項（主項）から主項表を作る
7. $m_i \leq p_j$ となる組み合わせを主項表から探す（×）
8. 縦に見て、×が１つの列を探す→×がある所が必須主項に対応
9. 必須主項で覆われている最小項を消す
10. 残った最小項があれば、残りの主項からリテラルが少ないものを採用して、全ての最小項が覆われる組み合わせを探す
    - 必須主項と採用した主項の和を取り最簡形を得る

主項表

主項(p_j) ↓	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1x_2x_3$	$x_1x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ ←最小項m_i
$\overline{x}_1x_3$	×	×			
$x_1\overline{x}_3$			×		×
x_2x_3		×		×	
x_1x_2			×	×	

$$f = \overline{x}_1x_3 + x_1\overline{x}_3 + x_1x_2 \quad \text{or} \quad f = \overline{x}_1x_3 + x_1\overline{x}_3 + x_2x_3$$

もう少し複雑な例

$$T(f_2) = \{00110, 00100, 01100, 11100, 10010, 10100, 00011, 00111, 00101, 01001, 01011, 01101, 11111, 11101, 10011, 10111, 10101\}$$

[0]		
a.	00100	√
b.	00011	√
c.	00101	√
d.	00110	√
e.	01001	√
f.	01100	√
g.	10010	√
h.	10100	√
i.	00111	√
j.	01011	√
k.	01101	√
l.	10011	√
m.	10101	√
n.	11100	√
o.	10111	√
p.	11101	√
q.	11111	√

[1]		
a-c.	0010-	√
a-d.	001-0	√
a-f.	0-100	√
a-h.	-0100	√
b-i.	00-11	√
b-j.	0-011	⑥
b-l.	-0011	√
c-i.	001-1	√
c-k.	0-101	√
c-m.	-0101	√
d-i.	0011-	√
e-j.	010-1	⑦
e-k.	01-01	⑧
f-k.	0110-	√
f-n.	-1100	√
g-l.	1001-	⑨
h-m.	1010-	√
h-n.	1-100	√
i-o.	-0111	√
k-p.	-1101	√
l-o.	10-11	√
m-o.	101-1	√
m-p.	1-101	√
n-p.	1110-	√
o-q.	1-111	√
p-q.	111-1	√

[2]		
ac-di.	001--	②
ac-fk.	0-10-	1√
ac-hm.	-010-	2√
ad-ci.	001--	:acdi
af-ck.	0-10-	:acfk
af-hn.	--100	3√
ah-cm.	-010-	:achm
ah-fn.	--100	:afhn
bi-lo.	-0-11	③
bl-io.	-0-11	:bilo
ci-mo.	-01-1	④
ck-mp.	--101	6√
cm-io.	-01-1	:cimo
cm-kp.	--101	:ckmp
fk-np.	-110-	5√
fn-kp.	-110-	:fknp
hm-np.	1-10-	4√
hn-mp.	1-10-	:hmnp
mo-pq.	1-1-1	⑤
mp-oq.	1-1-1	:mopq

[3]		
1-4.	--10-	①
2-5.	--10-	:1-4
3-6.	--10-	:1-4

表 3.7 クワイン - マクラスキ法の適用例

例の続き

		a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	i.	j.	k.	l.	m.	n.	o.	p.	q.	
① --10-	:acfk-hmnp	x		x			x		x			x		x	x		x		必須 1-fhn
② 001--	:acdi	x		x	x					x									必須 2-d
③ -0-11	:bilo		x							x			x			x			
④ -01-1	:cimo			x						x				x		x			
⑤ 1-1-1	:mopq													x		x	x	x	必須 5-q
⑥ 0-011	:bj		x								x								
⑦ 010-1	:ej					x					x								
⑧ 01-01	:ek					x						x							
⑨ 1001-	:gl							x					x						必須 9-g
被覆数		2	2	3	1	2	1	1	1	3	2	2	2	3	1	3	2	1	
被覆 by 必須		1,2	↑	1,2	2	↑	1	9	1	2	↑	1	9	1,5	1	5	1,5	5	

表 3.8　主項表

10.残った最小項があれば、残りの主項からリテラルが少ないもの
を採用して、全ての最小項が覆われる組み合わせを探す

$$(U_3 + U_6)(U_7 + U_8)(U_6 + U_7) = U_3U_7 + U_6U_7 + U_6U_8$$

主項関数：Ui i番目の主項を使う

今の場合はどの組み合わせも積項の数が２つなので、リテラルの少ないものを選ぶ

$|p_3| = 3, |p_6| = 4, |p_7| = 4, |p_8| = 4$ だから、U_3U_7 の組み合わせが最も短い

$$f_2 = x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_3x_5 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_2x_4x_5 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_5$$

ここまでのまとめ：論理関数の簡単化

$$T(f) = \cup_{p_j \in Q} T(p_j) \qquad Q \subseteq P_j$$

(a) $|Q|$ が最小

(b) 式全体で使われるリテラルの個数が最小
(|Q|が同じ組み合わせが複数あったら)

- カルノー法
  - ３～６変数に適用可能
  - 分かりやすいけど、<u>見落としなどミスもある</u>
- クワイン・マクラスキ法
  - 変数が多くても大丈夫。ただし、n2^n程度のメモリが必要なので大きなｎでは無理
  - プログラムしやすい

<u>次ページの練習問題(1)、(2)を*QM*法で解くこと(レポート)</u>

練習問題

（１）以下のカルノー図で表される論理関数をクワインマクラスキ法で簡単化しなさい

f_3: $w = 0$

xy \ zv	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1		
11	1	1	1	1
10	1			1

$w = 1$

xy \ zv	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

（２）以下の論理関数をクワインマクラスキ法で簡単化しなさい

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + x\bar{y}zw + xy\bar{z}w$$

論理式

- 形式的定義（3回目でやった）

1. 0,1, 変数は論理式である
2. E, F が論理式の時、$\overline{E}, (E \cdot F), (E + F), (E \oplus F)$ は論理式である
3. 以上の（1）、（2）だけでできるものが論理式である

基本演算子→論理式の性質→式の変形操作

- ここでは逆の見方をする（**代数系**）

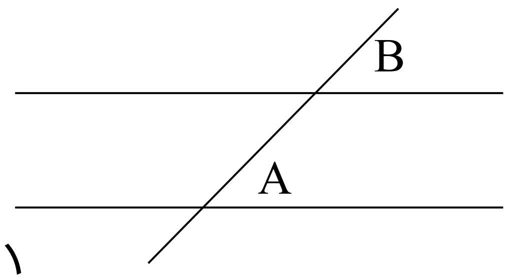
式の変形操作→論理式の性質→論理演算子

- 代数系での定義の流れ

1. 演算子と元の集合を指定する
2. 公理系を定める（この公理系が演算子の意味を定める）

公理とは？

- 他の命題を導くための前提
  - 真実である必要はない
- 公理主義数学
  - 公理から全てを導き、全体として矛盾のない体系を作る
  - 例：ユークリッド幾何学の第5公理
    - 平行線の錯角は等しい(A=B)
    - 平面では正しいが球面では成立しない
      - 非ユークリッド幾何学



モデル

- モデルとは、抽象代数において対象集合を特定し、演算子を公理系を満たす関数として特定したもの
    - 例１： $< \mathcal{B}; \cdot, +; 1, 0 >$ →今までやってきた論理関数
    - 例２：命題論理
        - 知識を真偽の決まる文として表現：「１は奇数である」
    - 例３：集合論
- ブール代数の公理系を満たすモデルは沢山ある

公理系の例：ブール代数の公理系

- 演算子と元が具体的に何であるかを特定しない抽象代数

【ブール代数の公理系】† ($x, y, z \in \mathcal{B}$)

(1)	単位元	$x \cdot 1 = x$,	$x + 1 = 1$.
(2)	零元	$x \cdot 0 = 0$,	$x + 0 = x$.
(3)	べき等律	$x \cdot x = x$,	$x + x = x$.
(4)	交換律	$x \cdot y = y \cdot x$,	$x + y = y + x$.
(5)	結合律	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,	$x + (y + z) = (x + y) + z$.
(6)	吸収律	$x \cdot (x + y) = x$,	$x + (x \cdot y) = x$.
(7)	分配律	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
(8)	相補律	$x \cdot \overline{x} = 0$,	$x + \overline{x} = 1$.
(9)	二重否定	$\overline{\overline{x}} = x$.	
(10)	ド・モルガン律	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$,	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

演算子が公理系から定義されている点に注意

例：演算子 $\overline{}$ が相補律から定義されている

ブール代数の公理系の特徴

- 冗長：他の公理から導ける公理がある
  - 例：　(6) 吸収律　　$x \cdot (x+y) = x$

$$x \cdot (x+y) = xx + xy = x(1+y) = x$$

（7）分配律　（3）べき等律　（1）単位元

- 双対性：・と +, 0と1を入れ替えると対になる式が公理に含まれる

【ブール代数の公理系】† $(x, y, z \in \mathcal{B})$

(1) 単位元	$x \cdot 1 = x\ ,$		$x + 1 = 1\ .$
(2) 零元	$x \cdot 0 = 0\ ,$		$x + 0 = x\ .$
(3) べき等律	$x \cdot x = x\ ,$	$\longleftrightarrow$	$x + x = x\ .$
(4) 交換律	$x \cdot y = y \cdot x\ ,$	$\longleftrightarrow$	$x + y = y + x\ .$
(5) 結合律	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\ ,$	$\longleftrightarrow$	$x + (y + z) = (x + y) + z\ .$
(6) 吸収律	$x \cdot (x + y) = x\ ,$	$\longleftrightarrow$	$x + (x \cdot y) = x\ .$
(7) 分配律	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\ ,$	$\longleftrightarrow$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)\ .$
(8) 相補律	$x \cdot \overline{x} = 0\ ,$	$\longleftrightarrow$	$x + \overline{x} = 1\ .$
(9) 二重否定	$\overline{\overline{x}} = x\ .$		
(10) ド・モルガン律	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}\ ,$	$\longleftrightarrow$	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}\ .$

$\longleftrightarrow$ 双対（dual）な式

非冗長な公理系：ハンチントンの公理系

【ハンチントンの公理系】　($\mathcal{B}$ はこの公理系で定義される要素の集合である.)

(1) (非自明性)　$x \neq y$　となる $x, y \in \mathcal{B}$が少なくとも 1 組存在する.

(2) (演算子)　$x, y \in \mathcal{B}$ならば，　$x \cdot y \in \mathcal{B}$，　$x + y \in \mathcal{B}$.

(3) 交換律　$x \cdot y = y \cdot x$,　$x + y = y + x$.

(4) 分配律　$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,　$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.

(5) 単位元・零元　$x \cdot 1 = x$,　$x + 0 = x$　となる要素 1，0 が $\mathcal{B}$ に存在する.

(6) 相補律　$x \cdot \overline{x} = 0$,　$x + \overline{x} = 1$　となる$\overline{x} \in \mathcal{B}$が存在する.

- 冗長でない
- ブール代数の公理系はハンチントンの公理系から導くことが出来る
  - 結合律すら証明の対象：(5) 結合律　$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,　$x + (y + z) = (x + y) + z$.
  - 証明は教科書108ページ

参考：ANDとXORの公理系

- ORの代わりにXOR
  - $x + y = x \oplus y \oplus xy$ で置き換え可能

【可換環・体の公理系】† (x, y, zは対象集合の元である.)

(R1) 交換律	$x \oplus y = y \oplus x$,	$x \cdot y = y \cdot x$.
(R2) 結合律	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$,	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
(R3) 分配律	$x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$,	$(y \oplus z) \cdot x = (y \cdot x) \oplus (z \cdot x)$.
(R4) 零元・単位元	$x \oplus 0 = x$,	$x \cdot 1 = x$.
(R5) 逆元（加法）	$\forall x$; $x \oplus y = 0$ を満たす解 y $(= (-x))$ が存在する.	
(F5) 逆元（乗法）	$\forall x \neq 0$; $x \cdot y = 1$ を満たす解 y $(= x^{-1})$ が存在する.	

完全系（万能な系）

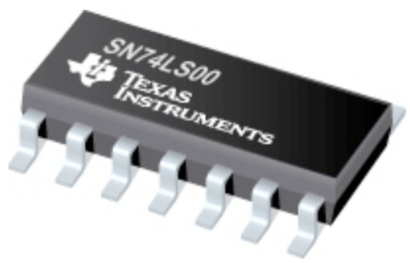
- 任意の論理関数は{NOT, AND, OR}で書く事ができた

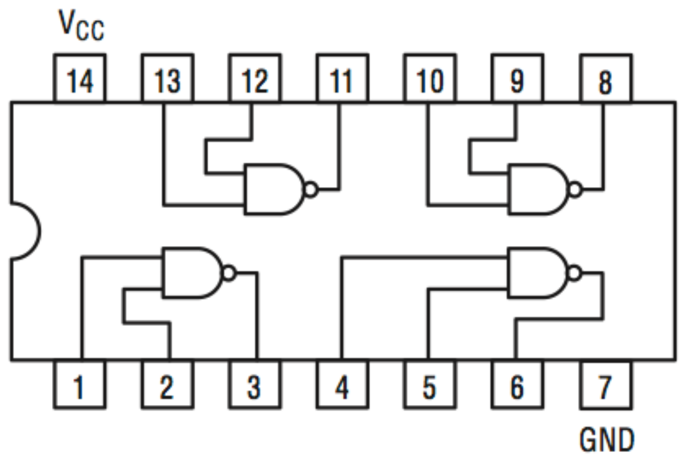
⇩

- {NOT, AND, OR}は完全系（万能な系）であると呼ぶ
- **完全系**：すべての論理関数を表現できる代数系
  - 以下の系を始め多くの完全系がある
    - {NAND}
    - {NOR}
    - {EXOR, AND, 1}
    - {P, M, 1, 0} (P: パリティ関数、M: 多数決関数)
- **極小完全系**：それ以上演算子を減らせない系
  - 例：＋は $x+y=\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{y}}=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}$ によりNOTとANDに置き換え可能なので、{NOT, AND}も万能で、これ以上は減らせないので、極小完全系。
  - 同様に{OR, NOT}、{NOR}、{NAND}なども極小完全系

NANDの完全性

- SN74LS00（型番的に一番基本的な回路）
  - NANDが4個入ったIC

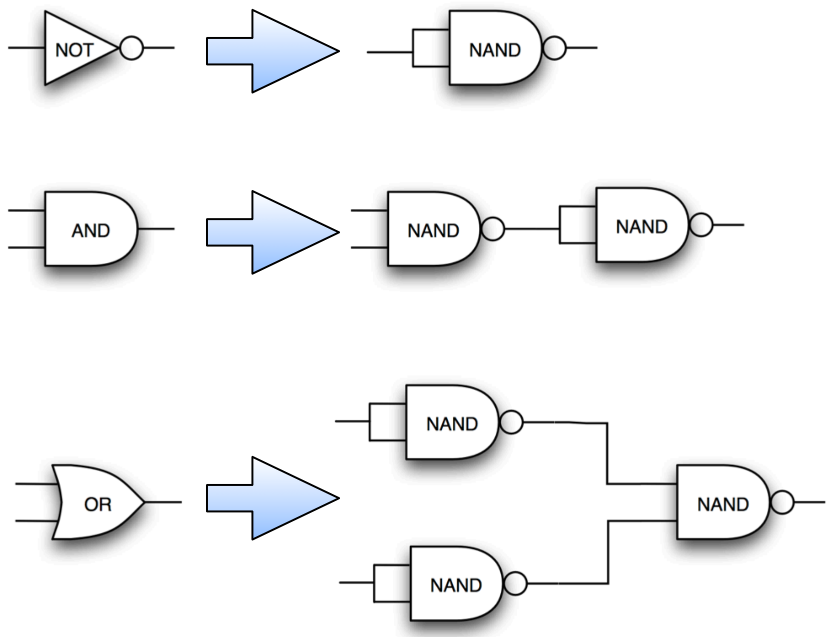




$$\bar{x} = \overline{x \cdot x}$$

$$x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}}$$

$$x + y = \bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$



同族関数

- 変数の交換、変数の否定、関数値の否定を施して出来る新しい論理関数は、リテラルが異なっているだけで形は同一であると考え、**同族関数**と呼ぶ

  例： $x \cdot y \to \overline{x} \cdot y \to x \cdot \overline{y} \to \overline{x} \cdot \overline{y}$

  $\to$（関数の否定）$\to x + y \to \overline{x} + y \to x + \overline{y} \to \overline{x} + \overline{y}$

  - 10個の2変数論理関数のうち上記の８つは全て同族である
    - 残り2つは互いに同族

  $$XOR = x\overline{y} + \overline{x}y \to EQUI = \overline{x}\overline{y} + xy$$

- 同様に論理関数の諸性質がp91-p97にまとめられている
  - 期末試験には出しませんが、自習しておくこと